Série 6 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Calcul matriciel, matrice élémentaire, inverse de matrice*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4.

a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a), b) et c).

Sol.:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Pour inverser la transformation associée à A, on considère la même transformation qui permute les lignes 2 et 4, ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à B, on considère la transformation qui soustrait cinq fois la ligne 1 à la ligne 3, ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à C, on considère la transformation qui divise la ligne 3 par 17, ainsi $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(i) en utilisant la formule générale de l'inverse d'une matrice 2×2 ;

(ii) en mettant la matrice $(A \quad I_2)$ sous forme échelonnée réduite.

b) Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ en mettant la matrice $(B \quad I_3)$ sous forme échelonnée réduite.

Sol.:

a) Pour la matrice A.

(i) $\det(A) = 2 \times 4 - 2 \times 2 = 4$. Ainsi, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Pour la matrice B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Ainsi, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possible, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A) Comme la colonne 1 est un multiple de la colonne 2, les colonnes sont linéairement dépendantes, et donc la matrice A n'est pas inversible.

B) Après plusieurs opérations de réduction sur les lignes, on obtient une forme échelonnée (non réduite)

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On trouve un pivot dans chaque ligne et la matrice est carrée, donc elle est inversible.

C) C est inversible car sous forme échelonnée (non réduite) avec pivot dans chaque ligne et la matrice est carrée.

D) D^T est sous forme échelonnée, avec un pivot dans chaque ligne et de taille carrée, donc D^T est inversible. Par conséquent, D est également inversible.

E) La matrice E n'est pas carrée, donc non inversible.

Exercice 4

Calculer les produits suivants en utilisant la multiplication par bloc :

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sol.:

a)

$$\text{On a} \quad \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} A_1B_1 + A_2B_2 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_2 \end{array}\right), \quad \text{donc} \quad \left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 5 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right).$$

b)

$$\text{On a} \quad \left(A_1 \mid A_2 \mid A_3 \right) \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline B_3 \end{array} \right) = \left(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \right), \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\text{On a} \quad \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array} \right) \left(B_1 \mid B_2 \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 & A_1B_2 \\ \hline A_2B_1 & A_2B_2 \end{array} \right), \quad \text{donc} \quad \left(\begin{array}{c|c} 3 & 6 \\ \hline 4 & 8 \end{array} \right).$$

Exercice 5

Soient A_{11} et A_{22} des matrices carrées.

a) On suppose que A_{11} est inversible. Déterminer X, Y et S satisfaisant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où le produit matriciel de droite est compatible avec la multiplication par bloc.

b) On suppose que A_{11} et A sont inversibles. Montrer que S est inversible.

Remarque : La matrice S est appelée le *complément de Schur*.

Sol.:

a) Admettons que A_{11} est une matrice de taille $n \times n$ et A_{22} de taille $m \times m$. Donc, la matrice A est de taille $(m+n) \times (m+n)$, A_{21} de taille $m \times n$ et A_{12} de taille $n \times m$. On calcule que

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + S \end{pmatrix}.$$

Successivement, on peut déduire que Y est de taille $n \times m$, X de taille $m \times n$ et S de taille $m \times m$. De plus, on remarque que

$$Y = A_{11}^{-1}A_{12}, \qquad X = A_{21}A_{11}^{-1}, \qquad S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

b) D'abord, comme A_{11} est inversible, la décomposition de la partie a) est bien définie. En utilisant, l'exercice précédent on obtient

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

où la partie gauche de l'équation est un produit de matrices inversibles, donc la partie droite de l'équation est également inversible. Par la théorie vu en classe lors du calcul de l'inverse d'une matrice tiangulaire supérieure par bloc, il faut que la matrice S soit inversible.

Exercice 6

Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{pmatrix},$$

puis utiliser le résultat précédent pour résoudre le système

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= -4 \\ -6x + 13y &= 1. \end{aligned}$$

Sol.: On calcule $\det A = 3 \cdot 13 - (-6) \cdot (-7) = -3$, et donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/3 & -7/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le système peut s'écrire sous la forme $A\overrightarrow{z} = \overrightarrow{b}$, avec

$$\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui est équivalent à

$$\overrightarrow{z} = A^{-1}\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $x = 15$ et $y = 7$.

Exercice 7

Soit h un nombre réel et D la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$. On définit une application $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par $T(A) = D \cdot A$.

1. Déterminer si T est linéaire (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
2. Déterminer si T est surjective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
3. Déterminer si T est injective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

Indication. Traiter le cas où D est inversible pour résoudre une équation de type $D \cdot A = B$.

Sol.: L'application T est linéaire, nous avons vu en cours que la multiplication matricielle est distributive (compatibilité avec la somme) et compatible avec l'action.

Puisque $\det D = h + 4$, la matrice D est inversible pour $h \neq -4$. On traite ce cas d'abord et on s'occupera du cas $h = -4$ par la suite.

Lorsque D est inversible, l'équation $D \cdot A = B$ est équivalente à l'équation

$$A = I \cdot A = D^{-1} \cdot D \cdot A = D^{-1} \cdot B$$

Ainsi T est surjective puisque toute matrice B est obtenue comme $T(D^{-1} \cdot B)$. De plus T est injective puisque la seule matrice A qui est envoyée sur zéro est la matrice $D^{-1} \cdot (0) = (0)$.

Il reste à traiter le cas où $h = -4$. Ici T est donnée par la formule

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 2a-4c & 2b-4d \end{pmatrix}$$

On voit ici que les deux lignes de la matrice TA sont proportionnelles, ce qui signifie que T ne peut être surjective. Une matrice qui n'a pas cette propriété n'est pas de la forme TA. Par exemple il n'existe aucune matrice A telle que $TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette application n'est pas injective non plus puisque $T\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sol.: La matrice A est une matrice *carrée* de dimension 4×4. Il suffit de la mettre sous forme échelonnée pour voir qu'elle a 4 pivots :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Un théorème du cours montre que A est inversible.

La matrice B est carrée et de dimension 4×4. De plus B est déjà sous forme échelonnée, on voit donc directement qu'elle a 4 pivots et donc qu'elle est inversible.

Si on transpose la matrice C on trouve :

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

La transposée de C est donc une matrice carrée de dimension 4×4 qui a 4 pivots. Donc C^T est inversible. Donc C est inversible.

Par contre la matrice D est de dimension 4×3 et ne peut pas être inversible.

Exercice 9

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente*.
2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explicite cette fois !) de la matrice $I - C$.
4. Soit $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\overrightarrow{x} = C\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \overrightarrow{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\overrightarrow{x} = (I - C)^{-1}\overrightarrow{b}$.

Sol.:

1. On calcule $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et alors $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente* lorsqu'une puissance de C est nulle.
2. Il suffit de calculer le produit en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

   $$(I_3+C+C^2)(I_3-C) = I_3 \cdot I_3 + C \cdot I_3 + C^2 \cdot I_3 - I_3 \cdot C - C \cdot C - C^2 \cdot C = I_3 + C + C^2 - C - C^2 - C^3$$

   Par commutativité de l'addition matricielle on trouve donc $I_3 - C^3 = I_3$ puisque $C^3 = 0$. Ainsi $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Le calcul ci-dessus montre que

   $$(I - C)^{-1} = I_3 + C + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. L'échelonnage de la matrice augmentée donne la solution $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. La formule $\overrightarrow{x} = (I - C)^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$ donne la solution $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10

Calculer l'inverse des matrices ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Soient A, B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$.	☐	☐
b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi.	☐	☐
c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible.	☐	☐
d) Si A est une matrice inversible de taille $n\times n$, alors l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$.	☐	☐

Sol.:

a) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Alors on a
$(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, tandis que
$(AC)B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$, alors il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Ces équations, lues de droite à gauche, disent que la matrice A^{-1} est aussi inversible et que son inverse vaut A, ainsi $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) Faux. Si A et B sont inversibles, d'inverses respectifs A^{-1} et B^{-1}, alors le produit AB est inversible et son inverse vaut $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En effet $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n = (B^{-1}A^{-1})(AB)$. Donc le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n\times n$ est toujours inversible.

d) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ et $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$ alors l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une (unique) solution qui est $\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$.

Exercice 12

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- ☐ Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
- ☐ Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.

- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Alors $(AB)^T = A^T B^T$.
- ☐ Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- ☐ Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- ☐ Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.

c)
- ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est diagonale.
- ☐ Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est scalaire, i.e. $C = \lambda I$, où I est la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est diagonale ou C est diagonale.
- ☐ Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est scalaire ou C est scalaire.

d) Soit A une matrice de taille 7×8 et T l'application linéaire définie par $T\overrightarrow{x} = A \cdot \overrightarrow{x}$. Alors $\overrightarrow{x}$ est un vecteur de

- ☐ $\mathbb{R}^7$
- ☐ $\mathbb{R}^8$
- ☐ $\mathbb{R}^{15}$
- ☐ $\mathbb{R}^{56}$

e) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Alors BA est une matrice $n \times n$.
- ☐ Alors A^T est une matrice $m \times n$.
- ☐ Alors A représente une application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
- ☐ Alors $(AB)^T$ est une matrice $p \times m$.

f) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

- ☐ Si $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $C = C^{-1}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

g) Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors

- ☐ $A + I$ est inversible.

☐ $(A-I)(A+I) = A^2 - I$.
☐ $(A+I)(A+I) = A^2 + I$.
☐ $(aA)^2 = a(A^2)$.

Sol.:

a) Le point 1 est vrai. En effet, si AB est inversible, alors l'application linéaire représentée par AB est bijective. On en déduit que B est injective et A est surjective, donc A, B sont bijectives, donc inversibles, vu que ce sont des matrices carrées. Ainsi, si A ou B n'est pas inversible, AB n'est pas inversible. Ce raisonnement montre également que le point 2 est faux. Pour voir que le point 3 est faux, prendre $A = I$ et $B = -I$. Pour le point 4, il est vrai que si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, mais l'inverse est donné par $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) La réponse correcte est la 2. Pour le point 1, la formule est $(AB)^T = B^T A^T$. Pour le point 3, il suffit que A soit symétrique. Pour le point 4, on a $(AB)^T = BA$.

c) Le point 1 est faux : prendre, par exemple, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le point 2 est vrai. Pour voir que les points 3 et 4 sont faux, prendre les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $\mathbb{R}^8$.

e) Le produit BA n'est pas bien défini si $m \neq p$. La matrice A^T est de taille $n \times m$. La matrice A représente une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Le point 4 est vrai.

f) Pour voir que les points 1, 2 et 4 sont faux, prendre, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point 3 est vrai, car si on applique $C^{-1} = C$ à droite de chaque côté de l'équation $AC = BC$, on obtient $A = B$.

g) Pour voir que le point 1 est faux, prendre $A = -I$. Le point 2 est vrai par distributivité :

$$(A-I)(A+I) = A \cdot A - I \cdot A + A \cdot I - I \cdot I = A^2 - A + A - I = A^2 - I.$$

Le point3 est faux, car il manque le double produit $A \cdot I + I \cdot A = 2A$. Le point 4 n'est vrai que si $a^2 = a$. C'est donc faux en général. Par exemple si $A = I$ et $a = 2$ on a $(2I)^2 = 4I \neq 2I = 2I^2$.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 13

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.

Sol.: Le produit AB est bien défini, le nombre m de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. En transposant, le nombre de lignes de A^T est égal au nombre de colonnes de B^T, donc le produit $B^T A^T$ est également bien défini. On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et on compare les éléments d'indice ij des matrices $(AB)^T$ et $B^T A^T$:

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki},$$

$$\left(B^T A^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \left(B^T\right)_{ik} \left(A^T\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki} a_{jk},$$

on obtient les mêmes quantités, ainsi $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 14

a) Soit A une matrice anti-symétrique de taille $n \times n$. Montrer que
   i) pour toute matrice B de taille $n \times n$ anti-symétrique, $A + B$ est anti-symétrique ;
   ii) si A est inversible, alors A^{-1} est anti-symétrique.

b) Calculer la décomposition en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique, des matrices M de taille 3×3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol.: a) A et B sont deux matrices anti-symétriques donc leurs coefficients vérifient $a_{ji} = -a_{ij}$ et $b_{ji} = -b_{ij}$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$. La matrice $C = A + B$ a pour coefficients $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et vérifie alors $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = -a_{ij} - b_{ij} = -c_{ij}$. Elle est donc anti-symétrique.
Si A est inversible, alors il existe A^{-1} vérifiant $A^{-1}A = I_n$. En transposant cette relation, on obtient $A^T (A^{-1})^T = I_n$. En utilisant l'anti-symétrie de A il vient alors $A(A^{-1})^T = -I_n$, et une multiplication à gauche par A^{-1} permet d'obtenir $A^{-1}A(A^{-1})^T = I_n(A^{-1})^T = (A^{-1})^T = -A^{-1}$, ce qui prouve que A^{-1} est anti-symétrique.
b) Pour la première matrice M, on obtient après calculs

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la seconde matrice, on s'aperçoit qu'elle est symétrique et donc trivialement $S = M$ et $A = 0_n$.

Exercice 15

a) Montrer que l'inverse de la matrice

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & & \vdots \\ & & & -l_{i+1,i} & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -l_{n,i} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

est donné par

$$L_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & & \vdots \\ & & & l_{i+1,i} & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n,i} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que le produit de deux matrices $L_i, L_j, i < j$ est donné par

$$L_i L_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \vdots & & -l_{i+1,i} & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & -l_{j+1,j} & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & -l_{n,i} & & -l_{n,j} & & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que

$$L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

a) On propose deux méthodes pour l'inverse de la matrice.

Méthode 1. On calcule la forme échelonnée réduite de la matrice $[L_i \quad I]$:

$$[L_i \quad I] \to \dots \text{(à détailler)} \to [I \quad L_i^{-1}].$$

Méthode 2. (sans calcul) La matrice L_i correspond à une collection d'opérations élémentaires sur les lignes. C'est la matrice qui soustrait la ligne i aux lignes $i+1, \dots, n$ avec des coefficients multiplicateurs respectifs $l_{i+1,i}, \dots, l_{n,i}$. Par conséquent, l'inverse L_i^{-1} est donné par la matrice qui **ajoute** la ligne i aux lignes $i+1, \dots, n$ avec les mêmes coefficients multiplicateurs.

b) Si M est une matrice avec n lignes, le produit $L_i M$ correspond à soustraire la ligne i aux lignes $i+1, \dots, n$ de la matrice M avec les coefficients multiplicateurs respectifs $l_{i+1,i}, \dots, l_{n,i}$. On applique ce résultat pour $M = L_j$ en utilisant $j > i$. $\square$

c) On effectue une preuve par récurrence.

(initialisation) Pour $k = n-1$, en utilisant a) on obtient L_{n-1}^{-1}.

(récurrence) Supposons que

$$L_k^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_{k+1,k} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & l_{n,k} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

est vrai pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Donc par un raisonnement similaire qu'en b) on obtient

$$L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = L_1^{-1}(L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1})$$

$$= L_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_{3,2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & l_{n,2} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat. $\square$

Exercice 16

a) Montrer qu'une matrice partitionnée triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

avec A_{11} matrice de taille $n \times n$ et A_{22} matrice de taille $m \times m$, est inversible si et seulement si A_{11} et A_{22} sont inversibles.

b) Montrer que les matrices partitionnées

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où I est la matrice identité $n \times n$, sont toujours inversibles. Donner l'inverse.

Sol.:

a) En utilisant une des charactérisations des matrices inversibles nous déduisons (respectant la forme triangulaire de A)

$$\begin{aligned}
&\text{la matrice } A \text{ de taille } (n+m)\times(n+m) \text{ est inversible}\\
&\qquad\Leftrightarrow \text{la matrice } A \text{ a } n \text{ positions pivots dans les } n \text{ premières lignes}\\
&\qquad\quad\ \text{et } m \text{ positions pivots dans les } m \text{ dernières lignes}\\
&\qquad\Leftrightarrow \text{la matrice } A \text{ a } n \text{ positions pivots dans le bloc } A_{11}\\
&\qquad\quad\ \text{et } m \text{ positions pivots dans les } m \text{ dernières lignes}\\
&\qquad\Leftrightarrow \text{la matrice } A \text{ a } n \text{ positions pivots situées dans le bloc } A_{11}\\
&\qquad\quad\ \text{et } m \text{ positions pivots situées dans le bloc } A_{22}\\
&\qquad\Leftrightarrow A_{11} \text{ de taille } n\times n, A_{22} \text{ de taille } m\times m \text{ sont inversibles}
\end{aligned}$$

b) *Première partie :* U est une matrice partitionnée triangulaire inférieure que l'on a étudiée dans la partie a) de cet exercice. Comme $A_{11} = A_{22} = I$, la matrice identité de taille $n \times n$, on déduit directement que U est inversible (comme la matrice identité est inversible). Calculons encore l'inverse

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ XB_1 + B_3 & XB_2 + B_4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donc on déduit successivement que $B_1 = I$, $B_2 = 0$, $B_3 = -X$ et $B_4 = I$. Finalement, on obtient

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix}.$$

Deuxième partie : Nous observons que V^T a la forme de la matrice U étudiée dans la partie précedente de cet exercice donc

$$(V^{-1})^T = (V^T)^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Y^T & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Y^T & I \end{pmatrix}.$$

Nous concluons que

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Exercice 17

Calculer les produits matriciels suivants :

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

En déduire le théorème suivant : Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, alors le produit AB peut être obtenu par la formule colonne-ligne suivante :

$$AB = \mathrm{col}_1(A)\mathrm{lig}_1(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A)\mathrm{lig}_n(B), \tag{1}$$

où $\mathrm{col}_k(A)$ est la matrice $m \times 1$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A, et $\mathrm{lig}_k(B)$ est la matrice $1 \times p$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B.

Souvenez-vous de cette propriété du produit matriciel : on l'a utilisée en conjonction avec le théorème spectral et avec le théorème de la décomposition en valeurs singulières pour écrire une matrice A comme une somme de plusieurs matrices simples : $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v}_i \overrightarrow{v}_i^\top$ (pour une matrice symétrique) et $A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \overrightarrow{u}_i \overrightarrow{v}_i^\top$ (pour une matrice quelconque). Faites explicitement le lien avec cet exercice.

Sol.:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$.

Preuve du théorème : Soit C la matrice $m \times p$ définie par le produit $C = AB$. Pour $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

On définit désormais, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la matrice $C^{(k)}$, de taille $m \times p$, donnée par $C^{(k)} = \mathrm{Col}_k(A)_k(B)$. La matrice $C^{(k)}$ s'écrit

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1k}b_{k1} & \cdots & a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mk}b_{k1} & \cdots & a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix},$$

i.e. on a $c_{ij}^{(k)} = a_{ik}b_{kj}$. On s'aperçoit alors que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} C^{(k)} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = c_{ij},$$

ce qui conclut la preuve.

Exercice 18

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour les quelles les matrices suivantes sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs de λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Sol.: Après plusieurs opérations élémentaires, on a transformé la paire $(A \,|\, I_3)$ en

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La matrice à gauche est ligne-équivalente à la matrice identité I_3 si et seulement si $\lambda \neq 0$. Donc A est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$, et dans ce cas son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2/\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

Pour la seconde, on procède de même, et on montre que B est inversible si et seulement si $\lambda \neq 1/2$, et que dans ce cas

$$B^{-1} = \frac{1}{5(1-2\lambda)} \begin{pmatrix} 5-7\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 3\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ -15 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 19

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, puis AC. Qu'observez-vous ?

Sol.: On trouve

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -9/2 \end{pmatrix}.$$

On conclut que A n'est pas inversible, car si elle l'était, on pourrait multiplier les deux côtés de $AB = AC$ par A^{-1}, et conclure que $B = C$.

Cet exemple montre donc qu'en calcul matriciel, $AB = AC$ n'implique pas forcément que $B = C$, même si A n'est pas nulle.